Uvažování o počtech, množstvích a číslech

Adam Nohejl

27. ledna 2010

Ne náhodou sdílí počítání se čtením příznačný praslovanský základ *čit-* s původním významem *rozeznávat* (podle [6]). Číst (psát) a počítat jsou první dovednosti, kterým se učíme ve škole. Jsou založeny na lidské schopnosti rozeznávat, přesněji na tom, co ji odlišuje od té zvířecí: na práci se symboly a abstrakci.

Zvláště čísla jsou zajímavá pro širokou škálu vrstev myšlení, v nichž vystupují, počínaje okamžitým rozeznáním a pojmenováním malého počtu předmětů nebo porovnáváním velkých, ne nutně určitých množství a konče čistě abstraktní, matematickou konstrukcí čísel. Je tato škála spojitá? Je možné se od okamžitě vnímaných počtů a množství k abstraktním číslům dostat i jinak?

Po tom, co nám byla na základních školách a gymnáziích vštěpována totožnost okamžitě vnímaných počtů i množství s abstraktními čísly, se nám do útrob našeho uvažování o číslech proniká nesnadno, podobně jako se nám jen stěží daří číst po písmenech a postupně z nich skládat slabiky a slova jako v první třídě. V případě čísel je však úrovní abstrakce přece jen více, a tak se při kalkulacích s nimi zadrháváme a slabikujeme nejen v první třídě, ale po celý život.

Na rozdíl od čtení se navíc při práci s čísly schopnost určité formy slabikování, rozkladu na elementární kroky, stává nutností, chceme-li s nimi pracovat pokročilejším způsobem. V podobném duchu o tom psal jeden z nejznámějších matematiků, který se zabýval teorií čísel, Richard Dedekind:

> Naopak právě v této možnosti redukovat takové pravdy [o číslech] na jiné, jednodušší, bez ohledu na to jak dlouhá a zjevně umělá je posloupnost vyvození, vidím přesvědčivý důkaz, že jejich osvojení nebo důvěra v ně není nikdy dána vnitřním vědomím, a nýbrž je nabyta jen více či méně úplným opakováním jednotlivých kroků odvození. Rád srovnávám tuto činnost mysli, tak těžko vysledovatelnou pro hbitost, s níž ji provádíme, s činností, kterou provádí zběhlý čtenář při čtení; [. . .][1]

Pokusme se také opatrně opakovat kroky vedoucí od přirozeného pojmu počtu a množství až k číslům. Naším hlavním záměrem na rozdíl od Dedekindova v předchozím odstavci nebude ověřovat naše přirozené úsudky pomocí sledů logických inferencí, ale porovnávat abstrahovaná čísla s přirozenějšími pojmy našeho myšlení a ověřovat, nakolik jsme vůbec těchto abstrakcí schopni.

Cesta k přirozeným číslům pomocí číslic a aritmetiky

Aniž bychom potřebovali umět počítat (ve smyslu určování počtu spočtením nebo prováděním početních operací), umíme přímo vnímat malé počty objektů, například ok na kostce. Od určité hranice si přestáváme být přesným počtem jisti, dokážeme ho rozpoznat, jen když jsou objekty ve vhodné prostorové konfiguraci (dvě řady po pěti, čtverec a šestiúhelník), nebo je v myšlenkách do takových konfigurací přeskupujeme. Není teď pro nás podstatné, kde tato hranice je a na čem přesně záleží: jedná se vždy o malé konečné číslo.

Vidíme okamžitě, že •••• je stejně jako ∷ a více než ∴; poznáme dokonce, že je to právě o • více. Tyto okamžitě vnímané počty se později naučíme pojmenovávat číslovkami a zapisovat číslicemi, a

[1] Z předmluvy k Dedekindovu eseji o povaze a významu čísel (v anglickém překladu *The Nature and Meaning of Numbers* v [3]). Můj překlad do češtiny.

tím si otevřeme cestu k matematickým přirozeným číslům (dále budu pojem přirozená čísla používat jen v matematickém významu). Klíčové pro obě tato vyjádření, pomocí dnes běžně užívaných číslovek a pomocí arabských číslic, je užití desítkové soustavy. Ta nám dovoluje vyjadřovat velmi velká čísla nesrovnatelně stručněji oproti unárnímu záznamu.[2]

Samotný jazyk by nás ovšem vedl jiným směrem než abstraktním číslům. Číslovky *tucet*, *kopa* nebo *mandel* připomínají jiné soustavy, které dříve v jazyce doplňovaly tu desítkovou, a ještě něco podstatnějšího: větší neurčitost, kterou s sebou tyto výrazy nesou,[3] a jejich omezenost na poměrně malé počty. I když na první pohled není mezi zápisem arabskými číslicemi a číslovkami velký rozdíl, uvědomme si, jak jsou velké desítkové číslovky neohrabané: jen v trochu vyšších řádech se s nimi dostáváme do obdobných problémů jako s tucty a veletucty. Počínaje bilionem může jeden název označovat různé číslo v závislosti na kulturních zvyklostech[4], podobně vysoká nebo vyšší čísla pro nás navíc navzdory existujícím vykonstruovaným názvům (decilion, centilion aj.) nemají žádný přirozený smysl vzhledem k jednotkám. Samy tyto číslovky se spíše používají jako jednotky v určitých kontextech: státní dluh se může měřit v miliardách (korun) podobně jako se pšenice na burze prodává po bušlech.

Oproti tomu zápis arabskými číslicemi a s ním spojené techniky kalkulací se přímo nabízí pro konstrukci velkých čísel. Arabské číslice a popisy kalkulací s nimi do Evropy pronikly ve dvanáctém století díky latinskému převodu al Chvárizmího *Aritmetickém traktátu* z počátku devátého století.[5] Perský učenec al Chvárizmí hrál jen roli prostředníka, číslice 0 až 9 znal z Indie. Těžko dnes s jistotou určíme, co motivovalo tamější vynález desítkových číslic, ale Petr Vopěnka v knize [2] vysvětluje, že to byla „snaha operovat s nepředstavitelně velkými čísly, a nikoliv s čísly užívanými v běžném životě“. V Indii totiž stejně jako v Evropě desítkovým číslicím předcházel jiný, přirozenější, ale zároveň méně pravidelný systém, který je ve spojení s abakem a velkou násobilkou pro běžnou potřebu dostatečný.

Klíčové je, že spolu s arabskými číslicemi přišla do Evropy sada postupů, chcete-li algoritmů, jak s nimi provádět aritmetické operace. Kalkulace s čísly v desítkovém zápisu se dají provádět bez jakéhokoli znalosti jejich významu, správnost kalkulací na ní nijak nezávisí. Na rozdíl od počítání na počítadle sám tento kalkul nijak neomezuje velikost čísel s nimiž operujeme. Snadno můžeme provádět formálně korektní kalkulace, jejichž výsledek stěží vyslovíme, natož abychom ho mohli v rozumném čase ověřit na skutečných předmětech.

Tuto sílu si al Chvárizmí uvědomuje a využívá ji: hned v úvodu Aritmetického traktátu vymezuje pojem čísla: „číslo není nic jiného než soubor jednotek“ a zdůrazňuje, že takto je třeba chápat všechna čísla, jakkoli velká. Postupy se pokouší provázet odůvodněním správnosti, snaží se zdůraznit pravidelnost konstrukce vyšších řádů z jednotek, a jakousi intuitivní indukcí tak správnost této konstrukce rozšířit na libovolně vysoké řády. Aby předvedl možnosti nového nástroje, hned v úvodu použije jako příklad číslo 1 180 703 051 492 863 (zkuste ho přečíst!). Stojí za povšimnutí, že když se později dostane k násobení, doporučí tzv. devítkovou zkoušku (založenou na provedení výpočtu modulo devět). Tato zkouška slouží k odhalení početní chyby, ale nijak neověřuje správnost samotných algoritmů, naopak staví na jejich správnosti.

Dnes se tyto postupy učíme na základní škole jako písemné sčítání, odčítání, násobení a dělení, a záhy je obdobně a bez větších obtíží aplikujeme na záporná čísla a zlomky, které jsou tedy z hlediska našeho uvažování o číslech méně zajímavé. (Povšimněme si zatím jen, že zatímco zlomky, které al Chvárizmí také zaváděl, mají jasnou geometrickou interpretaci, záporná čísla ji postrádají.) Učíme

---

[2] Unární záznam používáme, když píšeme čárku za každou jednotku. Stejně dobře jako desítková soustava by nám posloužila soustava o libovolném základu: délka zápisu čísla je vždy přibližně úměrná jeho logaritmu o daném základu. Klasické římské číslice ovšem, na rozdíl od arabských, degenerují v tisících a vyšších řádech na unární záznam (MMM. . .).

[3] Dobře to ilustruje anglický výraz *baker's dozen* (pekařský tucet), který dnes bývá chápán jako třináct. Ve starším slovníku [4] ale najdeme i čtrnáct. Pekaři totiž údajně kdysi přidávali jeden kus (nebo dva) do tuctu, aby se ujistili, že pečivo bude mít předepsanou váhu. Význam se tu odvíjí od funkce, ne od přesného počtu. Číslovka pak může mít dokonce upřesňující přívlastky podobně jako tradiční míry (český loket, námořní míle). Proto se tyto číslovky ostatně někdy nazývají početní míry.

[4] Pro Evropany bilion znamená 10^{12}, ve Spojených státech a dnes i dalších anglicky mluvících zemích je roven 10^{9}, tedy naší miliardě.

[5] Český překlad byl nedávno vydán spolu s *Algebraickým traktátem* a rozsáhlým komentářem Petra Vopěnky v knize [2].

se libovolná přirozená čísla, případně celá nebo racionální čísla, zapsat pomocí deseti arabských číslic, případně také znaménka minus nebo zlomkové čáry, a učíme se s nimi provádět aritmetické operace. Tyto zápisy čísel a výsledky operací jsou určeny jednoznačně svými postupy (až na zlomky, pokud je nekrátíme). Jasně teď vidíme, že přirozená čísla vyvstávají právě z tohoto kalkulu. Vidíme také, že jsou konceptem odlišným od počtů skutečných předmětů: spojení mezi těmito dvěma světy vytváříme induktivním ověřením správnosti postupů pro zápis nebo provádění operací, zjevné je jen pro malé okamžitě vnímané počty. Právě toto odtržení čísel od počtů, které začíná formálně definovanými operacemi a spěje k teorii budované z logických axiomů, je klíčové pro rozvoj matematiky.

Jak jinak k formálním číslům?

Než obrátíme pozornost k dalším, složitějším abstraktním číslům, která se běžně používají, zamysleme se, jak jinak by se dala zavést formální čísla: taková, která by měla přesně definovaný zápis a operace. Přirozená čísla jsou, jak jsme popsali, založená na tezi, že číslo není nic jiného než soubor jednotek. To dobře odpovídá okamžitě vnímaným počtům (• a • jsou •• apod.), ale ne přirozenému vnímání velkých množství: s tím se přirozená čísla rozchází. Velká množství reálných objektů vnímáme buď jen relativně („je více než“) nebo jako násobky nějakých více či méně přirozených celků. V obou případech bývá toto vnímání navíc zatížené nějakým stupněm nejistoty. Pokud bychom vyšli právě z této nejistoty a předpokladu, že je nějak ohraničená, mohli bychom zkonstruovat intervalovou aritmetiku v tomto stylu:

$$(1 \text{ až } 2) + (1 \text{ až } 3) = (2 \text{ až } 5)$$

To může na první pohled vypadat lákavě. Intervalová aritmetika má dokonce reálné využití, ale buduje se z nějakých čísel jako jejich zobecnění, ne jako jejich alternativa. Při bližším pohledu navíc vidíme, že výsledky operace vyjadřují spíše než nejistotu určitý druh jistoty o operacích s čísly, která neznáme přesně. Jestliže máme číslo od 1 do 2 a přičteme k němu jiné od 1 do 3, výsledek bude jistě mezi 2 a 5. Dále bychom mohli požadovat, aby výsledky byly „ostré“ v tom smyslu, že výsledný interval není zbytečně velký, a zkoumat, pro jaké složitější matematické operace nebo algebraické formule lze takové přesné intervalové zobecnění zavést. Takové úvahy vedou k využití intervalových výpočtů v oblastech jako je automatické dokazování vět nebo v numerických úlohách, kde požadujeme naprosto spolehlivé horní a dolní odhady výsledku.

Zkusme to tedy jinak: Jestliže velká čísla vnímáme jako násobky nějakých celků, tak by naše formální čísla mohla mít dvě části: *počet* a *velikost*. Počet by byl nějaký rozumně malý (řekněme od • do ∷∷) a možných velikostí by bylo také jen konečně mnoho (označme je třeba řeckými písmeny A až Ω). Tuto soustavu bychom doplnili ještě o symboly ⊙ pro nic a § pro velmi mnoho. Operace by se podstatně lišily od těch, které známe z běžných čísel: sčítání mezi počty stejné velikosti bychom zavedli, pokud by to šlo, přirozeným způsobem, v opačném případě bychom místo přenosu do vyšších řádů prováděli (podle nějakého pravidla) přenos do množství, a následně do §. Obdobně by se postupovalo pro další operace a mohli bychom definovat i záporná čísla včetně −§, případně −⊙. Pokud bychom chtěli, mohli bychom definovat také výsledek operace $x \div$ ⊙ = §.

V takovém systému by se mohlo pro některá čísla x a y stát, že $x + y = x$, přestože $y \neq$ ⊙, $(x + y) - y \neq x$ a zřejmě také $x \div y =$ ⊙. Takovéto operace by tedy měly nám dobře známé vlastnosti čísel (asociativitu, distributivitu, jednoznačnost neutrálního nebo inversního prvku) jen ve zvláštních případech. To je ale jen přirozené, když mají reflektovat nepřesnost. Těžko bychom na nich vybudovali nějakou zajímavou matematiku, nejde totiž o těleso ani jinou významnou algebraickou strukturu: potíže by nastaly hned u středoškolské algebry: úpravy rovnic by měly nanejvýš přibližný význam.

Na rozdíl od intervalové matematiky, o které jsme krátce uvažovali, lze takový systém bez obtíží vybudovat i nezávisle na jiných, matematicky zajímavějších číslech. Kdybychom ovšem měli současně k dispozici běžná celá čísla, nabízelo by se „překládat“ námi zavedená množství $A, B, \Gamma, \ldots, \Omega$ do řeči běžných čísel jako $1, 9^1, 9^2 \ldots, 9^{23}$ a dvojici počet-velikost následně jako součin odpovídajících čísel. Našim alternativním číslům by pak odpovídala nějaká podmnožina celých čísel s přidanými prvky

$+\infty$ a $-\infty$. Vzhledem k uvedeným vlastnostem by se ale takovým vztahem (ani žádným jiným) nedaly do běžných čísel přenést výsledky operací s alternativními čísly. Například by mohlo platit •B + •A = •B, což odpovídá intuitivní představě, že když k poměrně velkému souboru přidáme pouhou jednotku, jeho velikost se nezmění, ale do běžných čísel bychom to přeložili jako $9 + 1 = 9$, což neplatí.

Podařilo se nám načrtnout konstrukci formálních čísel, která není zobecněním ani podstrukturou běžných matematických čísel. Tato čísla tvoří paralelu našeho intuitivního uvažování o počtech a množstvích do té míry, do jaké se dá zformalizovat. Kdybychom zavedli výše uvedený překlad do běžných čísel, dostali bychom se poměrně blízko tzv. semilogaritmickému tvaru (zápisu $a \cdot 10^b$ pomocí mantisy a a exponentu b). Podstatný rozdíl spočívá v tom, že naše počty a množství vybíráme jen z konečně mnoha hodnot a operace máme zavedené přímo na nich. Společná je naopak logaritmická stupnice, kterou tvoří jak naše množství, tak exponenty, ta navíc aproximuje lidské vnímání některých kvantitativních jevů.[6]

Bohužel se zdá, že takto navržená čísla jsou nanejvýš umělá, nepřirozená. Troufám si tvrdit, že je to v prvé řadě proto, že netvoří dost pravidelnou strukturu. Přirozená schopnost abstrakce a práce se symboly, na kterou jsme se odvolávali v úvodu, jde ruku v ruce s hledáním pravidelností, symetrií, zákonitostí (jakkoli nemusí v námi vnímaném světě vždy platit). To je nutné nejen pro vybudování nějaké zajímavé formální matematiky, ale v prvé řadě proto, aby ony abstrakce a symboly mohly dobře sloužit jako prostředek komunikace. Vidíme ted' jasněji, že běžná přirozená čísla, která se učíme ve škole, sice zřejmě neodpovídají našemu vnímání počtů a množství, ale jsou skutečně přirozeným pravidelným rozšířením malých počtů, a to zřejmě nejjednodušším. Prozatím tedy náš pokus o alternativní čísla naprosto selhal; ještě se na něj ale později podíváme z jiného úhlu.

Cesta k iracionálním číslům pomocí algebry

Začali jsme s přirozenými čísly (0, 1, 2, … případně jen 1, 2, …), která jsou rozšířením okamžitě vnímaných počtů. Bez velkého váhání jsme je rozšířili na celá čísla přidáním záporných. To odpovídá potřebě vycházející z formálních kalkulací a jde o další zpravidelnění struktury: máme díky tomu vždy definovaný výsledek odčítání a můžeme snadno provádět běžné algebraické manipulace s rovnicemi.[7] Jak obtížné (nepravidelné) jsou bez záporných čísel, se můžete snadno přesvědčit u al Chvárizmího, který ještě pokušení záporných čísel ve svém Algebraickém traktátu odolával, přestože mu k nim chyběl jen drobný krůček. Dalším poměrně přímočarým rozšířením jsou zlomky. Zavedeme-li zlomky i záporná čísla, získáme racionální čísla, ve kterých je možné nejen odčítat, ale i dělit bez omezení (až na dělení nulou); tato pravidelnost spolu s dalšími vlastnostmi činí z matematického pohledu z racionálních čísel těleso.

Obtížnost přijetí záporných čísel spočívá především v absenci jejich geometrické interpretace (a tedy i interpretace na hmotných předmětech), dobře jim ale odpovídá jen mírně abstraktní pojem dluhu, obecněji pak veličiny s opačnou orientací (opačná síla, rychlost). Nezáporné zlomky naopak jasnou geometrickou interpretaci mají. Jediná další čísla, která vyvstávají jako délky úseček z geometrických konstrukcí (tj. konstrukcí pomocí pravítka a kružítka) jsou ta, která z kladných zlomků získáme jednou nebo více aplikacemi operací sčítání, odčítání, násobení a druhé odmocniny. Říká se jim čísla *konstruovatelná* a jsou to například $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, tedy $\sqrt[4]{2}$, $2\sqrt{2}$, tedy $2^{\frac{3}{2}}$, nebo $\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} + 1$, ne však $\sqrt[3]{2}$ nebo $2^{\frac{2}{5}}$. Tato čísla získáváme algebraickým řešením geometrických úloh, jako je výpočet úhlopříčky obdélníku o daných stranách, a právě na ně se omezoval al Chvárizmí. Stejně jako

[6] Nejčastěji se uvádí hlasitost zvuku nebo tón. Diskuse, zda je tomu tak například u vnímání jasu nebo váhy spadá do oblasti psychofyziky, ve které byl navržen Stevensův mocninný zákon a Weberův–Fechnerův (logaritmický) zákon. Posoudit jejich adekvátnost neumím, ale bezpečně se dá tvrdit, že lidské vnímání není lineární a dá se často logaritmickou stupnicí aproximovat. Bez ohledu na to, logaritmická stupnice dobře slouží našemu vyjadřování a uvažování o (řádových) množstvích.

[7] Jde o dobře známé souběžné úpravy obou stran rovnice pomocí přičítání a odečítání, resp. násobení a dělení, které se v al Chvárizmího Algebraickém traktátu nazývají *al džebr*, resp. *al mukábala*. Podobně jako autorovo jméno dalo název obecným formálním postupům (algoritmům), tak první z jmenovaných úprav dala název celé algebře.

předchozí druhy čísel se každé konstruovatelné číslo dá zapsat konečnou posloupností symbolů (k číslicím, znaménku minus a zlomkové čáře stačí přibrat symbol odmocniny a závorky).

Kdybychom se v tomto směru chtěli vydat dále do abstraktní matematiky, přešli bychom přidáním kořenů libovolných polynomů ještě k *algebraickým číslům*. Mezi ta by patřila jak poslední dvě zmíněná čísla, tak některá komplexní čísla.[8]

Konstruovatelná čísla, resp. kořeny kvadratických rovnic, jsou i ve škole hlavní motivací pro zavedení iracionálních čísel (takových, která nelze vyjádřit zlomky). Užitečnost konstruovatelných čísel je zřejmá a díky možnosti geometrické interpretace je bez obtíží používal i al Chvárizmí. Samotný fakt, že některá konstruovatelná čísla jsou nutně iracionální, ale není očividný. Známý důkaz, že odmocninu ze dvou nelze vyjádřit jako zlomek, se dnes běžně probírá na gymnáziích a populárně se připisuje řeckému filosofu Hippasovi (5. stol. př. n. l.), který byl za šíření tohoto nepříjemného objevu údajně utopen (viz například [5]). Ať už je historka pravdivá nebo ne, jistě se touto otázkou staří Řekové zabývali, protože vyvstává zcela přirozeně z pokusů nějaké iracionální číslo jako zlomek zapsat a správnost takového zápisu následně ověřit.

Spletitá cesta k reálným číslům

Zdá se, že konstruovatelná čísla jsou dostačující pro veškeré přirozené úlohy. Proč se tedy vůbec zavádějí reálná čísla a co jsou vlastně zač? Pokud znáte odpověď na obě tyto otázky, jste snad aspoň na pochybách, proč se s takovou samozřejmostí zavádějí na základní škole nebo na gymnáziu. Podívejme se do gymnaziální učebnice [1]:

> Reálnými čísly nazýváme čísla, která vyjadřují délky úseček (při zvolené jednotkové úsečce), čísla k nim opačná a nulu. Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem. Každý bod číselné osy je obrázek právě jednoho reálného čísla.

Podle toho, co jsme doposud řekli, by toto mohl být docela dobře popis konstruovatelných čísel. Motivace je tu evidentně geometrická, a i když přijmeme, že je možné konstruovat úsečky iracionálních délek, dával by tento popis smysl jedině za předpokladu existence úseček, které by nešly pomocí pravítka a kružítka zkonstruovat z libovolné dané jednotkové úsečky. Takový předpoklad je ale velmi nepřirozený, a o nic lepší není motivace odvolávající na popis světa a měření veličin v něm. Není nic, co by pocházelo z měření veličin nebo eukleidovských konstrukcí a napovídalo, že k popisu světa je třeba jiných čísel než racionálních nebo konstruovatelných. Představa, že existuje více (a dokonce mnohem více) délek úseček, než lze popsat racionálními nebo konstruovatelnými čísly, jde zcela proti naší intuici.

Vraťme se tedy do předchozího oddílu a zkusme ještě spolu se středoškolskými učebnicemi do našeho číselného repertoáru přidat nekonstruovatelná algebraická čísla jako je $\sqrt[3]{2}$, tedy kořen rovnice $x^3 = 2$. Motivace k zavedení takových čísel není v pozorovatelném ani geometrickém světě, ale v algebře, matematice kalkulací, kde je jistě oprávněná. Mohli bychom chtít vyjádřit stranu krychle u níž předpokládáme, že má objem přesně dvě jednotky. takovou stranu sice neumíme změřit ani zkonstruovat, ale jedná se o přirozenou abstraktní úvahu. Zdá se, že jdeme správným směrem. Mohli bychom se od pozorovatelného světa oprostit zcela a chtít vyřešit veškeré rovnice, které nám zavedené symboly umožní napsat, například $-1 = x^2$. Nedostali bychom se ovšem za hranici již zmíněných algebraických čísel.

Zatím jsme záměrně nechávali stranou, co vlastně reálná čísla jsou. Vlastnost, kterou se reálná čísla běžně charakterizují, je spojitost: intuitivně to znamená, že mezi nimi nejsou mezery. Určitou spojitostí, laicky mnohem snáze pochopitelnou, disponují i racionální čísla: mezi každými dvěma

[8] Jako konstruovatelná čísla se často chápou i záporné protějšky skutečně konstruovatelných čísel, pak vznikne opět těleso. Algebraická čísla pro naše úvahy nemají příliš velký význam, na základní škole nebo gymnáziích se s nimi nijak nepracuje, a jak později uvidíme, přechází se rovnou o stupeň výše k číslům reálným. Poznamenejme jen, že i algebraická čísla tvoří matematicky hezkou strukturu, tedy těleso, že je jich stejně jako přirozených čísel nekonečně, ale jen spočetně mnoho a každé z nich je možné přirozeně popsat nějakou konečnou posloupností předem vybraných symbolů.

různými racionálními čísly lze nalézt další. Silnější vlastnost, kterou požadujeme po reálných číslech, má jediný cíl: formální infinitesimální počet, tedy to co studenti znají pod pojmy limita, derivace a integrál. Tuto vlastnost jasně definoval Georg Cantor v roce 1872 právě pomocí pojmu limity a ještě ten samý rok Richard Dedekind pomocí tzv. řezů. Princip Dedekindových řezů je jednoduchý a neodvolává se na jiné oblasti matematiky. Uveďme ho tedy tak, jak ho nastínil sám Dedekind:

> Jestliže se všechny body na přímce dělí do dvou tříd takových, že každý bod z první třídy leží nalevo od každého bodu z druhé třídy, pak existuje právě jeden bod, který vytváří toto rozdělení do dvou tříd, toto roztržení přímky na dvě části.[9]

V přesné definici řezu se jako onen dělící bod zvolí buď nejpravější bod první třídy nebo nejlevější bod druhé třídy, za řez se považuje toto rozdělení na dvě třídy a za totožné se považují řezy lišící se nejvýše zařazením dělícího bodu. Řezy se potom použijí pro konstrukci reálných čísel z racionálních: každý řez racionálních čísel určí nějaké reálné. Podrobněji viz [3]. Zkuste toto zavedení reálných čísel vychutnat a uvědomit si, nakolik jsou odlišná od racionálních, přestože to z popisu nemusí být na první pohled vidět: zkuste třeba zkonstruovat odmocninu ze dvou jako řez.[10] Za pozornost stojí také, že není možné každé reálné číslo zapsat konečnou posloupností nějakých dohodnutých symbolů (ekvivalentně lze říci, že reálných čísel je nespočetně mnoho). To proto, že mimo algebraických reálných čísel nám řezy přinesly nespočetně mnoho takzvaných transcendentálních čísel.

Dedekindovy řezy se samozřejmě na základní škole ani na gymnáziu neprobírají, místo toho se (v různé míře v závislosti na úrovni výuky matematiky) obvykle probere souvislost s limitami: až v reálných číslech má totiž každá shora omezená rostoucí posloupnost limitu. Je ovšem třeba si uvědomit, že původní infinitesimální počet Leibnize a Newtona nepracoval s dnešními rigorózními definicemi. Známá formální (ε, δ)-definice limity pochází z 19. století od Augustina-Louise Cauchyho a korektně na ní začal stavět až Karl Weierstrass, označovaný za otce moderní analýzy. Tímto způsobem se ovšem na gymnáziu matematická analýza nebuduje. (ε, δ)-definice může být přítomna v učebnici, ale pro žáky jde spíše o jakousi kouzelnou formuli, což je jedině dobře, protože intuitivní chápání pro ně na dané úrovni má mnohem větší přínos. Málokdy se studenti setkají s limitou, jejíž hodnotou by bylo transcendentální číslo, navíc limity obecně je čekají až v závěru středoškolského studia. Číselnou osu, na které „jsou vidět" reálná čísla, uvidí mnohem dříve.

Nyní snad alespoň mlhavě vidíme, co jsou reálná čísla a k čemu jsou užitečná: pro formalizaci infinitesimálního počtu. Motivace, která pro ně bývá předkládána na školách, bývá zavádějící. Nejsem pedagog a vycházím hlavně z vlastních, ještě poměrně živých vzpomínek, které z gymnázia mám. Cílem tohoto eseje není kritika gymnaziální výuky matematiky, ale domnívám se, že by jí mnohdy více prospěl přístup, který by sledoval přirozený historický vývoj myšlenek, a hlavně častější přemýšlení a diskuse na úkor řešení příkladů. Mělo by být jasné, proč se který abstraktní pojem zavádí, a pokud jsou některé cíle za hranicemi probíraného učiva, nemělo by to být zastíráno nejasnými popisy.

Reálná čísla jsou, spolu s komplexními, nejsložitějšími abstraktními čísly, se kterými se při studiu většina lidí setká. Nemůžeme se přitom nijak odvolávat na to, že by se lépe hodila pro popis pozorovatelného světa. Když doceníme jejich propastnou odlišnost od čísel racionálních i konstruovatelných, uvědomíme si, že případný krůček ke komplexním číslům je už jen malý. (Nehodnotíme teď technickou náročnost kalkulací s komplexními čísly.)

Abstraktní čísla v počítači?

Zvlášť v jednadvacátém století se nabízí ještě jedna otázka týkající se lidského uvažování o číslech: Jsou abstraktní čísla přirozenější pro počítače než pro lidi? Laik by mohl očekávat, že právě počítače nejsou „zatíženy" přirozenými lidskými zkušenostmi a mohou pracovat s abstraktními matematickými čísly. Paměť počítačů je sice omezená, ale mohly by umět pracovat alespoň s rozumně velkými reálnými, racionálními nebo celými čísly.

[9] Můj překlad z angličtiny, opět z [3].
[10] Nápověda: Popište prvky obou tříd řezu vhodnou kvadratickou nerovnicí.

Ve skutečnosti, reprezentuje-li počítač přirozená čísla, používá jen ta od 0 do nějakého pevného N a výsledky operací, které přesáhnou toto maximum se uloží modulo $N + 1$ (tedy jako zbytek po dělení číslem $N + 1$). Obdobně se pracuje i s celými čísly. To samozřejmě neodpovídá běžné aritmetice na přirozených číslech: platí pak mimo jiné $N + 1 = 0$. Takové aritmetice se říká modulární a má mimo jiné tu výhodu, že v rozumné míře zachovává vlastnosti, na něž jsme zvyklí u přirozených čísel, jako je distributivita a asociativita (ne ovšem pro dělení). Tato reprezentace čísel a s ní spojená aritmetika je z hlediska matematiky poměrně pravidelná, ale programátor se musí mít na pozoru, protože nepracuje s přirozenými čísly ani jejich podmnožinou.

Pro reprezentaci reálných čísel se většinou používá formát s plovoucí řádovou čárkou (*floating point*). Tento formát se podobá semilogaritmickému zápisu, ale používá dvojkovou soustavu, jeho exponent i mantisa nabývají některé z předem daných (a tedy omezených) hodnot a operace na něm jsou přesně definované a založené na vhodném zaokrouhlování.

Pozornému čtenáři neujde, že jsme se oklikou dostali k naší alternativní konstrukci formálních čísel. Součástí této reprezentace jsou mimo jiné zvláštní hodnoty „nekonečno“ a „záporná nula“. Problémy se shodují s těmi, které jsme popsali u naší konstrukce, jen se méně často projeví tak viditelně, protože mantisa je dvojkový zlomek s poměrně vysokou přesností a exponent má velký rozsah kladných i záporných hodnot. O to záludnější jsou ale důsledky toho, že operace nejsou vždy distributivní a asociativní. Můžeme takto reprezentovat vlastně jen racionální čísla z určitého rozsahu s určitou přesností: není tak například možné přesně do počítače uložit čísla 0,1 nebo $\frac{1}{3}$ (protože počítače pracují ve dvojkové soustavě). Tuto reprezentaci čísel používají například běžné tabulkové kalkulátory s oblibou používané na finanční kalkulace. Nemělo by nás pak překvapit, když místo nuly vychází nesmírně malé, ale nenulové číslo, nebo k částce, která měla vyjít přesně, jsou při složitějších kalkulacích přidány nějaké drobné.

Mimo tyto dvě reprezentace se samozřejmě používají i jiné, pokročilejší. Ty ale nebývají implementovány hardwarem a jsou tedy programátorsky i výpočetně náročnější. Z těch jednodušších jmenujme desítkovou reprezentaci (odpovídající desítkovému zápisu), která se hodí pro přesné finanční výpočty, z pokročilých už jsme se dotkli intervalové reprezentace. Používají se i různé symbolické reprezentace, které umožňují přesně pracovat s čísly vyjádřenými výrazy, jako je $\sqrt{2}$. Tyto reprezentace ale nejsou počítači „přirozené“, jsou výsledkem práce programátorů a používají se ve specializovaných aplikacích.

Závěr

Na cestě za abstraktními čísly jsme postupovali od okamžitě vnímaných počtů a množství k přirozeným číslům a od nich snadno odvozeným číslům celým racionálním. Viděli jsme, že klíčem k úspěšnému absolvování tohoto přechodu je zápis arabskými číslicemi a na něj vázané kalkulace. Popustili jsme uzdu fantazii a vyzkoušeli, k jakým výsledkům by mohla vést jiná, zcela hypotetická, méně abstraktní cesta a přesvědčili jsme se, že abstrakce přirozeně tvoří pravidelnosti a zákonitosti, které nemusíme vnímat u skutečných objektů. Právě v tomto druhu abstrakce jsou kořeny formální matematiky. Pomůckou a motivací při hledání dalších čísel nám byla geometrie, která nás spolehlivě zavedla ke zlomkům i konstruovatelným číslům. Další iracionální čísla, dokonce komplexní, jsme objevili pouze za pomoci kalkulací, abstraktních operací se symboly. Reálných čísel v celé jejich kráse jsme dosáhli až díky formalizaci infinitesimálního kalkulu, a uvědomili jsme si, že reálná jsou tedy jen do té míry, do jaké je pro nás reálný matematický pojem limity nebo Dedekindových řezů.

Přirozené počty a množství a matematická i strojová čísla je třeba spojovat nanejvýš opatrně a neuškodí občas si připomenout, odkud souvislosti i rozdíly mezi nimi pocházejí. Naše intuitivní představy matematickým číslům vždy neodpovídají a dokonce ani čísla v počítači se nechovají vždy, jak by měla. Počítejme s tím!

Reference

[1] Ivan Bušek a Emil Calda. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*. Prometheus, dotisk třetího vydání, 1992.

[2] Al Chvárizmí. *Aritmetický a algebraický traktát*. OPS, 2008. Komentářem opatřil Petr Vopěnka; z ruštiny přeložil Petr Bogdan.

[3] Richard Dedekind. *Essays on the Theory of Numbers*. The Open Court Publishing Company, 1901. URL `http://www.gutenberg.org/etext/21016`. Authorised Translation by W. W. Beman.

[4] Captain Grose et al. *Dictionary of the Vulgar Tongue*. Project Gutenberg, 10. vydání, 1811 (původní), 2002 (Project Gutenberg). URL `http://www.gutenberg.org/etext/5402`.

[5] Carl Huffman. Pythagoreanism. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Podzim 2008. URL `http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/pythagoreanism/`.

[6] Jiří Rejzek. *Český etymologický slovník*. Leda, 2001.